



**CONCOURS D'ADMINISTRATEUR-ADJOINT
2012-2013**

DIRECTION DES
RESSOURCES HUMAINES
ET DE LA FORMATION

Épreuves d'admissibilité

30 janvier 2013

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(durée 3 heures – coefficient 3)

Le sujet comporte sept exercices indépendants que chaque candidat peut traiter dans l'ordre de son choix.

Tous les résultats devront être justifiés par un raisonnement ou un calcul explicite.

N.B. : Pour cette épreuve, est autorisé l'usage d'une calculatrice de poche, y compris d'une calculatrice programmable et alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm x 15 cm de large (non fournie par le Sénat).

EXERCICE 1 (4 points)

Une laiterie industrielle conditionne des pains de beurre dont l'emballage porte l'indication d'un poids net de 500 grammes.

Un contrôle a été effectué sur le poids de 180 pains prélevés dans la production. Les résultats obtenus sont les suivants :

Poids (en g)	[470;480[[480;490[[490;500[[500;510[[510;520[[520;530[[530;540[[540;550[[550;560[
Nombre de pains	4	8	15	26	40	38	28	16	5

Dans cet exercice, les résultats numériques seront donnés et utilisés sous la forme de valeurs décimales, arrondies au millième le plus proche.

1) En considérant que les effectifs sont regroupés aux centres des 9 classes, calculer la moyenne arithmétique et l'écart-type de cette série statistique.

2) Calculer le pourcentage de pains dont le poids est supérieur ou égal à 500 grammes.

3) On admet que les poids des 180 pains sont indépendants les uns des autres. Avant l'emballage, les pains sont soumis à un contrôle sur le poids. Un pain est refusé s'il ne pèse pas au moins 490 grammes.

- a) On prélève au hasard un pain parmi les 180. Quelle est la probabilité qu'il soit refusé ?
- b) On prélève 2 pains. Calculer les probabilités des événements suivants :
A : "aucun des 2 pains n'est refusé" ;
B : "un pain au moins est refusé".

4) On admet que la laiterie produit 180 pains de beurre par heure, dont les poids avant emballage sont indépendants et que la probabilité de refuser un pain lors de l'emballage est : $p = 0,07$.

On note X la variable aléatoire qui à toute production horaire fait correspondre le nombre de pains refusés.

- a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
- b) Donner la valeur exacte de la probabilité de n'avoir aucun pain refusé dans une production horaire de 180 pains.
- c) Calculer la probabilité de l'événement $X = 9$.
- d) Calculer l'espérance mathématique de X . Interpréter ce résultat.

EXERCICE 2 (2 points)

L'âge moyen du personnel dans une entreprise de 80 salariés est de 41 ans avec un écart-type de 5 ans.

L'entreprise est contrainte de se restructurer pour faire face aux conséquences d'une crise financière et économique.

Deux personnes âgées de 55 ans et deux autres, l'une âgée de 57 ans et l'autre de 60 ans, vont partir en retraite anticipée.

Par ailleurs, l'entreprise va recruter trois nouveaux salariés, âgés respectivement de 25, 23 et 30 ans, pour développer de nouvelles méthodes de production.

Calculer le nouvel âge moyen du personnel et son nouvel écart-type après restructuration. Les résultats seront arrondis au dixième.

EXERCICE 3 (1 point)

Un magasin d'appareils ménagers propose 6 modèles de lave-linge. Il a réalisé une étude sur le prix de vente et le nombre de lave-linge vendus au cours de l'année précédente. Les résultats obtenus sont les suivants :

Prix du modèle (en €) : X	300	350	410	450	500	600
Nombre d'appareils vendus : Y	210	190	160	152	124	102

1) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

Les candidats pourront se contenter de donner les résultats obtenus directement à l'aide du menu statistique de la calculatrice.

2) À l'aide du modèle précédent, déterminer quel sera le nombre de lave-linge vendus en une année pour un nouveau modèle dont le prix est fixé à 560 €.

EXERCICE 4 (4 points)

Une entreprise souhaite s'agrandir et louer un nouveau local, à partir du 1^{er} janvier 2013.

Elle va signer un bail de neuf ans et s'engage à occuper ce local pendant toute cette période.

Le propriétaire lui propose deux types de contrats de location. Dans les deux cas, le loyer pour l'année 2013 est de 24 000 euros.

1) Contrat n°1

L'entreprise accepte une augmentation annuelle de 4 % du loyer de l'année précédente.

On note u_0 le loyer de 2013 et u_n le loyer de l'année (2013 + n).

- a) Calculer le loyer u_1 qui sera payé la deuxième année.
- b) Exprimer le loyer u_{n+1} en fonction du loyer u_n de l'année précédente.
En déduire la nature de la suite (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n.
- c) Calculer la somme totale payée par l'entreprise, à l'issue des neuf années, si elle choisit ce contrat n° 1.

2) Contrat n°2

Le loyer est augmenté chaque année d'une partie fixe de 800 euros et de 1 % du loyer de l'année précédente.

On note v_0 le loyer de 2013 et v_n le loyer de l'année (2013 + n).

- a) Calculer le loyer v_1 qui sera payé la deuxième année.
- b) Exprimer le loyer v_{n+1} en fonction du loyer v_n de l'année précédente.
- c) On pose $w_n = v_n + 80\,000$.
Montrer que (w_n) est géométrique de raison 1,01 et préciser son premier terme w_0 .
- d) En déduire l'expression de w_n en fonction de n puis celle de v_n en fonction de n.
- e) Calculer la somme totale payée par l'entreprise, à l'issue des neuf années, si elle choisit ce contrat n° 2.

EXERCICE 5 (3 points)

Un scrutin a été organisé pour renouveler le conseil municipal d'une ville.

Pour l'analyse des résultats, on distingue d'une part les électeurs, c'est-à-dire les personnes qui ont le droit de vote, d'autre part les votants, c'est-à-dire les personnes qui ont effectivement pris part au vote.

Le taux de participation est alors défini comme le rapport (nombre de votants/nombre d'électeurs) exprimé en pourcentage.

De plus, pour cette analyse du scrutin, les électeurs sont répartis en trois groupes, en fonction de leur âge :

- le groupe A, comprenant les électeurs de moins de 35 ans, représente 38 % de l'ensemble des électeurs ;
- le groupe B, comprenant les électeurs de 35 à 60 ans, représente 43 % de l'ensemble des électeurs ;
- le groupe C, comprenant les électeurs de plus de 60 ans, représente 19 % de l'ensemble des électeurs.

Enfin, les taux de participation ont pu être déterminés dans chacun des groupes : 81 % dans le groupe A, 84 % dans le groupe B et 69 % dans le groupe C.

1) On choisit un électeur au hasard. Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité que :

- a) ce soit un votant de moins de 35 ans ;
- b) cet électeur ait participé au vote.

Quel est le taux de participation au scrutin ?

2) On choisit par hasard un bulletin parmi les bulletins dépouillés après le scrutin.

Quelle est la probabilité que ce bulletin soit celui d'une personne :

- a) de plus de 60 ans ?
- b) de 35 ans ou plus ?

EXERCICE 6 (4 points)
Remboursement d'un prêt à taux fixe à mensualité constante

Imaginons que vous souhaitiez emprunter à votre banque un certain capital, C_0 (par exemple sur une certaine période, exprimée en années, car les remboursements seront annuels).

Appelons N ce nombre d'années de remboursement.

Votre banquier vous fera une proposition de taux d'intérêt et vous indiquera alors que dans ces conditions, vous aurez à verser chaque année une annuité A .

Cette annuité constante A est composée, d'une part, des intérêts dus pour l'année écoulée, d'autre part, du remboursement d'une partie du capital prêté. On parle de prêt à amortissement progressif du fait que, chaque année, la part du remboursement du capital augmente tandis que celle des intérêts diminue.

Tout cela est calculé pour que vous ayez remboursé la totalité de l'emprunt à la fin des N années.

Appelons i le taux d'intérêt annuel fixe pour toute la période des N années ; à l'origine, la banque vous prête le capital C_0 .

1) Une année plus tard, vous versez la première annuité A . Cette somme sert avant tout à rétribuer la banque pour vous avoir prêté C_0 sur une année. Vous lui versez donc un intérêt $I_1 = C_0 \times i$. Le reste de l'annuité, soit $A - I_1$, est la partie remboursée du capital.

Justifier que le montant du capital restant à rembourser à l'issue de la première année est : $C_0(1+i) - A$.

2) On note, pour tout k compris entre 1 et N , I_k le montant des intérêts la $k^{\text{ième}}$ année et C_k le capital à rembourser à l'issue de cette $k^{\text{ième}}$ année.

Justifier que : $C_k = C_{k-1}(1+i) - A$. En déduire en expliquant votre calcul, l'expression de C_k en fonction de C_0 , i , k et A .

3) Montrer que : $C_k = C_0(1+i)^k - A \frac{(1+i)^k - 1}{i}$

4) Exprimer l'annuité A en fonction de C_0 , i et N .

5) En déduire le montant total, I , des intérêts payés.

6) Vous avez trouvé l'appartement de vos rêves et vous devez emprunter 150 000 euros. Une banque vous prête l'intégralité de ce montant à un taux de 4 % par an. Seul bémol, vous ne pouvez rembourser que 1 000 euros par mois.

Au bout de combien d'années aurez-vous remboursé votre prêt ?

EXERCICE 7 (2 points)

Le tableau suivant fournit les prix et les quantités de deux produits consommés par un ménage en 2000. $I_{P2008/2000}$ et $I_{Q2008/2000}$ représentent respectivement les indices élémentaires des prix et des quantités de ces denrées en 2008 (base 100 en 2000). On donnera des valeurs arrondies au centième.

	Prix en 2000	Quantités en 2000	$I_{P2008/2000}$	$I_{Q2008/2000}$
A	4	5	200	25
B	10	4	120	125

- 1) Calculer les prix et les quantités pour l'année 2008.
- 2) Calculer et interpréter l'indice de Laspeyres des prix en considérant l'année 2000 comme référence.
- 3) Calculer le taux de croissance annuel moyen du prix du produit A entre 2000 et 2008.