



DIRECTION DES
RESSOURCES HUMAINES
ET DE LA FORMATION

CONCOURS D'ADMINISTRATEUR-ADJOINT 2021

Épreuves d'admissibilité

ÉPREUVE OBLIGATOIRE À OPTION : MATHÉMATIQUES

(durée 2 heures – coefficient 2)

Le sujet comporte cinq exercices indépendants que chaque candidat peut traiter dans l'ordre de son choix.

Tous les résultats devront être justifiés par un raisonnement ou un calcul explicite.

N.B. : L'usage d'une calculatrice de poche, y compris d'une calculatrice programmable et alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm × 15 cm est autorisé (non fournie par le Sénat).

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants :

- *Exercice 1 : 5 points*
- *Exercice 2 : 5,5 points*
- *Exercice 3 : 3 points*
- *Exercice 4 : 3 points*
- *Exercice 5 : 3,5 points*

Le sujet comporte 7 pages (y compris celle-ci).

Exercice 1 (5 points)

Une maladie virale se propage dans la population d'un pays.

Un test est mis au point pour dépister le virus.

Une campagne de dépistage systématique est lancée.

La probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98.

La probabilité qu'une personne non atteinte ait un test négatif est de 0,99.

Un test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte par le virus est supérieure ou égale à 0,95.

Un individu étant choisi au hasard dans la population, on note V l'événement « l'individu est atteint par le virus » et T l'événement « l'individu a un test positif ».

On note \bar{V} et \bar{T} les événements contraires.

Dans tout l'exercice, les résultats des calculs de probabilité sont demandés à 10^{-4} près.

Les parties I et II de cet exercice sont indépendantes.

I - Dans cette partie, on considère que la proportion de personnes atteintes par le virus dans la population est de 5 %.

- a) Calculer $p(T)$, probabilité qu'un individu choisi au hasard ait un test positif.
- b) Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit réellement atteint par le virus.
- c) Le test utilisé dans ces conditions est-il fiable ? Justifier.

II - Dans cette partie, on désigne par x la proportion de personnes atteintes par le virus, avec $0 \leq x \leq 1$

- a) Calculer, en fonction de x , la probabilité $p(T)$.
- b) Montrer que la probabilité de l'événement V sachant T est égale à $\frac{98x}{97x+1}$.
- c) On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = \frac{98x}{97x+1}$. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
- d) Calculer à partir de quelle proportion de malades dans la population le test est fiable. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible, puis d'un pourcentage à 0,01 % près.

Exercice 2 (5,5 points)

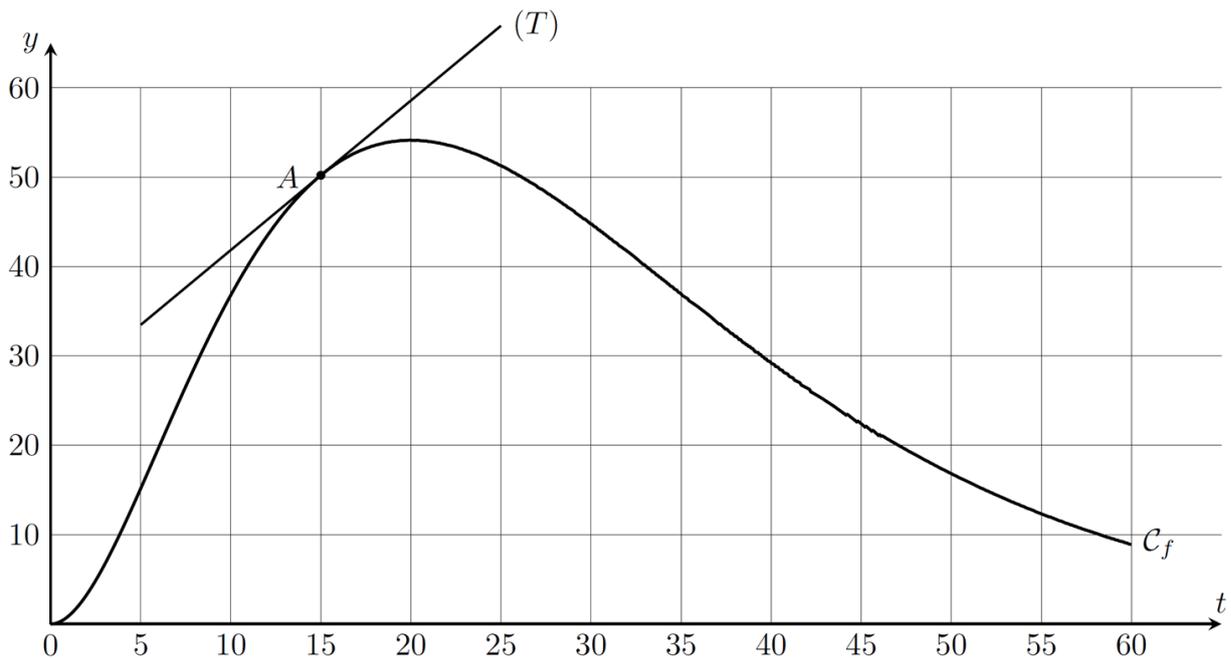
Une épidémie se propage dans un pays.

La fonction f représentée ci-dessous est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 60]$.

Elle modélise le nombre de malades, exprimé en milliers, en fonction du nombre de jours écoulés depuis le début de l'épidémie.

La vitesse de propagation de l'épidémie, exprimée en milliers de malades par jour, est modélisée par la fonction dérivée f' .

La droite (T) représentée sur le graphique est la tangente à la courbe au point A d'abscisse 15.



Les parties II et III de cet exercice sont indépendantes de la partie I.

I - Avec la précision permise par le graphique déterminer :

- a) Le nombre de malades 15 jours après le début de l'épidémie.
- b) Le nombre maximal de malades constaté sur la période étudiée.
- c) La vitesse de propagation de la maladie au bout de 20 jours. Justifier.
- d) Une valeur approximative de la vitesse de propagation au bout de 15 jours. Justifier.
- e) Le nombre de malades augmente entre le 15^{ème} et le 20^{ème} jour, peut-on en déduire que la propagation de l'épidémie accélère durant cette période ? Justifier.

II - La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 60]$ par $f(t) = t^2 e^{(-0,1t)}$

a) Calculer, à l'unité près, le nombre de malades au bout de 15 jours, et au bout de 20 jours.

b) Montrer que $f'(t) = 0,1t(20 - t)e^{(-0,1t)}$.

c) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0; 60]$.

d) Présenter dans un tableau les variations du nombre de malades sur la période étudiée.

e) Calculer la vitesse de propagation de l'épidémie au bout de 15 jours, puis au bout de 25 jours. Interpréter ces deux résultats.

III - La dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' est définie par :

$$f''(t) = (0,01t^2 - 0,4t + 2)e^{(-0,1t)}.$$

Les racines du trinôme $0,01t^2 - 0,4t + 2$, arrondies à l'unité, sont 6 et 34.

a) Présenter dans un tableau les variations de la vitesse de propagation de l'épidémie sur la période étudiée. Justifier.

b) Au bout de combien de jours la vitesse de propagation de la maladie est-elle maximale ? Indiquer cette valeur maximale et l'interpréter.

c) Sur quelle(s) période(s) le nombre de malades augmente-t-il ? Sur quelle(s) période(s) la propagation de l'épidémie est-elle en phase d'accélération ? Justifier.

Exercice 3 (3 points)

Le tableau ci-dessous présente l'évolution du SMIC mensuel brut, exprimé en euros, en France, de 2009 à 2014.

Année	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Smic mensuel y_i	1338	1344	1365	1426	1430	1445

Les parties I et II de cet exercice sont indépendantes.

I –

- a) On désigne par t le taux global d'augmentation du SMIC entre 2009 et 2014. Calculer t à 0,01 % près.
- b) On désigne par t' le taux moyen annuel d'augmentation du SMIC entre 2009 et 2014. Calculer t' à 0,01 % près.

II – On admet qu'à partir de 2014 le taux d'augmentation annuel du SMIC est égal à 1,55 %. Pour $n \geq 1$ on note s_n le montant du SMIC durant l'année de rang n , avec $n = 1$ en 2014.

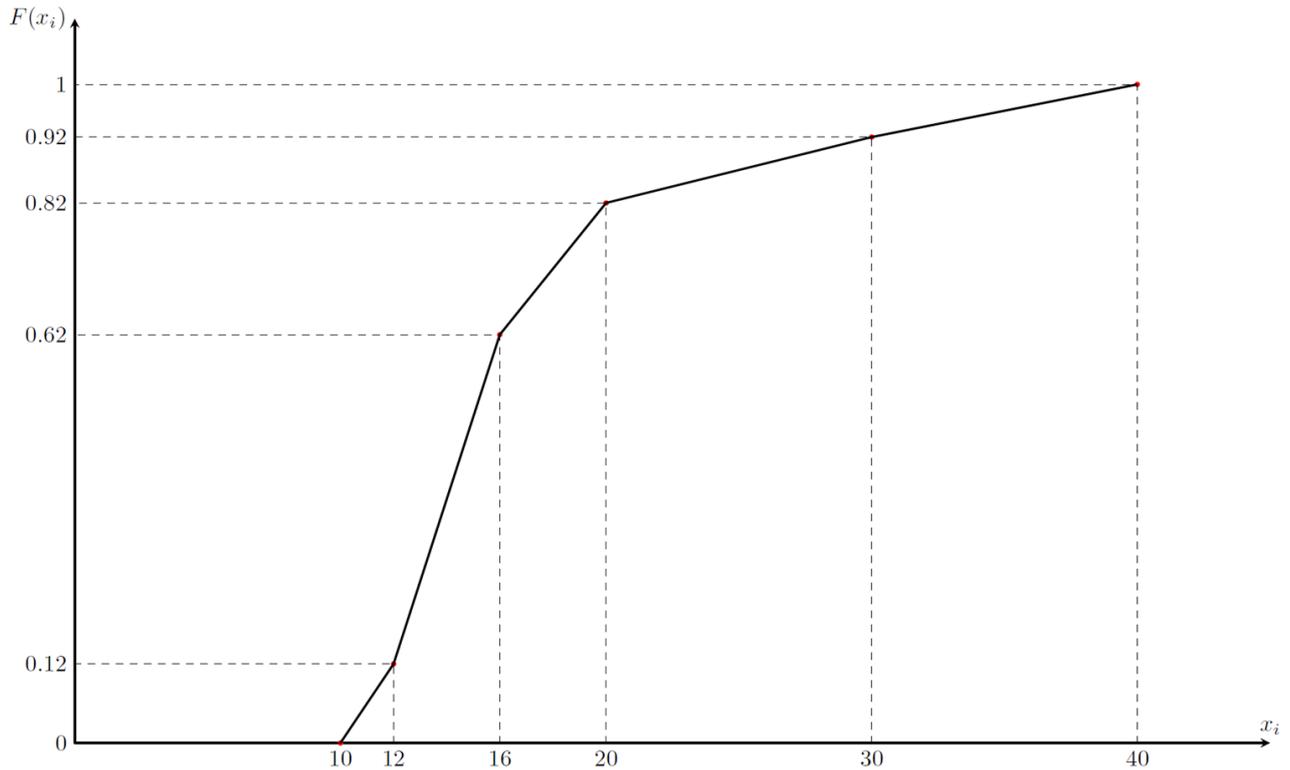
- a) Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n . En déduire la nature de la suite (s_n) .
- b) Exprimer s_n en fonction de n .
- c) En déduire, à un euro près, le montant du SMIC attendu en 2020 selon ce modèle.
- d) Calculer en quelle année le montant du SMIC atteindrait 1 800 € selon ce modèle.
- e) Le montant réel du SMIC brut en 2020 est 1 539 €. Que peut-on en déduire pour l'évolution du SMIC entre 2014 et 2020 ?

Exercice 4 (3 points)

La série statistique représentée dans le tableau ci-dessous indique la répartition des salaires mensuels, exprimés en centaines d'euros, des 50 salariés d'une entreprise.

Salaire mensuel (centaine d'euros)	[10; 12[[12; 16[[16; 20[[20; 30[[30; 40[
Nombre de salariés	6	25	10	5	4

Le graphique ci-dessous représente la fonction de répartition F.



- 1) Par lecture graphique déterminer une valeur approximative de la médiane Me de la série. Expliquer.
- 2) Déterminer par calcul une valeur approchée de Me .
- 3) Déterminer, à un euro près, le salaire médian dans cette entreprise. Interpréter sa valeur.
- 4) Calculer le salaire moyen ainsi que la masse salariale dans l'entreprise.
- 5) Comment peut-on expliquer l'écart entre salaire moyen et salaire médian dans cette entreprise ?
- 6) Il est envisagé d'embaucher un certain nombre n de techniciens dans l'entreprise, au salaire de 1 850 €.
 - a) Exprimer, en fonction de n , le salaire moyen dans l'entreprise après l'embauche.
 - b) En déduire le nombre maximal de personnes qu'il est possible d'embaucher de sorte que le salaire moyen n'augmente pas de plus de 20 €.

Exercice 5 (3,5 points)

Les parties I, II, III de cet exercice sont indépendantes.

I - Un étudiant a placé une somme de 3 000 € auprès d'un établissement d'épargne durant un certain temps. À la fin de cette période l'intérêt produit a été de 132 €.

Sachant que ce placement s'est fait à intérêts simples, au taux annuel de 2,4 %, déterminer sa durée en mois.

II - Un épargnant a placé une certaine somme S à la banque, au taux annuel de 4 %, durant 11 trimestres, à intérêts composés, par capitalisation trimestrielle.

a) Calculer, à 0,001 % près, le taux trimestriel t équivalent à un taux annuel de 4 %.

b) Sachant que l'intérêt produit par ce placement a été de 1 366,2 €, calculer à un euro près le montant de la somme S déposée.

III - Le cours d'une action a augmenté de t % puis a diminué.

Quel doit être le pourcentage de diminution pour qu'il retrouve sa valeur initiale ?