RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

SÉNAT

DIRECTION DES RESSOURCES HUMAINES ET DE LA FORMATION

CONCOURS D'ADMINISTRATEUR-ADJOINT
2016-2017

Épreuves d'admissibilité

MATHÉMATIQUES

Le sujet comporte six exercices indépendants que chaque candidat peut traiter dans l'ordre de son choix.

Tous les résultats devront être justifiés par un raisonnement ou un calcul explicite.

N.B. : Est autorisé l'usage d'une calculatrice de poche – y compris d'une calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome sans imprimante, sans aucun moyen de transmission, et sans document d'accompagnement.

(durée 3 heures – coefficient 3)

EXERCICE 1 *(2 points)*

Des vents d'une violence exceptionnelle ont traversé le nord de la France un certain 26 décembre, du Finistère à Strasbourg.

Le tableau suivant fournit pour 75 stations les vitesses moyennes mesurées sur les rafales :

Plages de vitesses en km/h	]70 ; 90]	]90 ; 110]	]110 ; 130]	]130 ; 150]	]150 ; 170]
Nombre de stations	8	8	25	22	12

1/ Calculer une valeur approchée de la moyenne des vitesses mesurées.

On *arrondira à* 10^{-2}.

2/ Tracer la courbe des effectifs cumulés croissants.

3/ Placer la médiane, le premier et le troisième quartile sur la figure.

4/ Déterminer la médiane par le calcul.

EXERCICE 2 ***(3 points)***

Une élection a lieu au scrutin majoritaire à deux tours.

Il n’y a pas de vote blanc ou nul.

Deux candidats A et B sont en présence.

Au premier tour, 40 % des suffrages des électeurs inscrits vont à A et 45 % à B, les autres électeurs inscrits s’étant abstenus.

Aucun candidat n’ayant obtenu la majorité absolue, un second tour est organisé. On estime que tous les électeurs ayant voté la première fois voteront à nouveau.

Un sondage indique que 5 % des voix de A se reporteront sur B et que 10 % des voix de B iront à A. On estime de plus que deux tiers des électeurs n’ayant pas voté au premier tour voteront, à raison de 60 % pour A et 40 % pour B.

1/ Quelle est la probabilité pour qu’un abstentionniste au premier tour, vote au second tour pour A ? pour B ?

2/ D’après ce sondage, quel candidat a la plus forte probabilité d’être élu ?

EXERCICE 3 *(1,5 point)*

La somme de 10 000 euros placée à intérêts composés à un certain taux annuel a produit, pendant la cinquième année de placement, des intérêts égaux à ceux qu'elle aurait produits, à intérêts simples, au même taux, en 427 jours.

On considère qu'une année comprend 365 jours. *On arrondira à* 10^{-2}.

1/ Calculer le taux de ce placement.

2/ Calculer les intérêts produits par ce placement en 10 années.

EXERCICE 4 *(7 points)*

Une étude relative au temps de paiement des clients aux caisses d'un hypermarché a montré que :

- la probabilité qu'un client paye en espèces est 0,5 ;
- la probabilité qu'un client paye par carte est 0,3 ;
- la probabilité qu'un client paye par chèque est 0,2.

On suppose qu'il faut 20 secondes pour enregistrer un paiement en espèces, 30 secondes pour un paiement par carte et 40 secondes pour un paiement par chèque.

On note D la variable aléatoire : « temps de paiement d'un client » exprimé en secondes.

1/ Déterminer la loi de D. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de D.

2/ Soient D_1 et D_2 les temps de paiement de deux clients. On suppose que D_1 et D_2 sont deux variables aléatoires indépendantes qui ont la même loi de probabilité que D.

a/ Calculer les probabilités suivantes :

$p_1 = p[(D_1 = 20) \text{ et } (D_2 = 30)]$
$p_2 = p[(D_1 = 20) \text{ ou } (D_2 = 30)]$
$p_3 = p(D_1 \leq 35)$
$p_4 = p[(D_1 = 20) \text{ ou } (D_1 = 30)]$

b/ Soit S la variable aléatoire définie par : $S = D_1 + D_2$
Calculer E(S) l'espérance de S, V(S) la variance de S et $p(S = 60)$.

3/ Dans une file d'attente, il y a deux clients. On suppose que les modes de paiement de ces clients sont indépendants.

Soient X, Y et Z les variables aléatoires définies par :

X : nombre de clients de la file qui payent en espèce ;
Y : nombre de clients de la file qui payent par carte ;
Z : nombre de clients de la file qui payent par chèque.

On suppose que chaque client paye soit en espèces, soit par carte, soit par chèque.

a/ Déterminer la loi du couple (X,Y) et les lois marginales.

b/ Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant que $X = 0$ ainsi que la loi conditionnelle de X sachant que $Y = 0$.
Reconnaître des lois classiques.

c/ Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire du couple (X,Y).

EXERCICE 5 ***(2,5 points)***

La société SÉNAVÉLO, spécialisée dans la location de vélos, a été créée en janvier 2016 avec un parc de 150 vélos neufs.

Afin de conserver un parc de bonne qualité le directeur de la société a décidé :

- de racheter 40 vélos neufs en janvier de chaque année ;
- de revendre 20 % des vélos les plus usagés en janvier de chaque année.

Pour tout entier naturel *n*, on note s_n le nombre de vélos du parc en janvier de l'année 2016 + *n*.
On a donc s_0 = 150.

1/ Calculer s_1 et s_2.

2/ Démontrer que pour tout entier naturel *n*, s_{n+1} = 0,8 s_n + 40.

3/ On pose r_n = s_n – 200 pour tout entier naturel *n*.

a/ Démontrer que la suite (r_n) est géométrique.

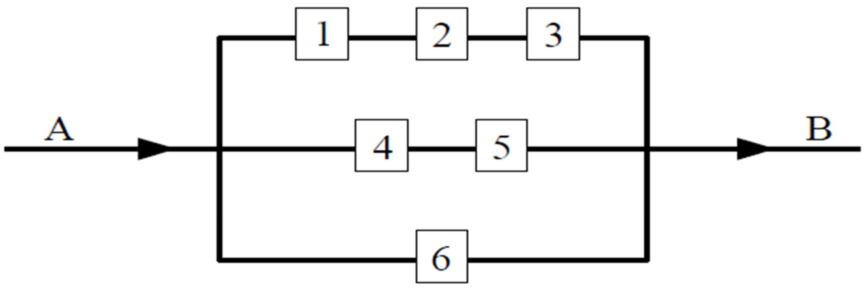
b/ Pour tout entier naturel *n*, exprimer s_n en fonction de *n*.

c/ Déterminer la limite éventuelle de la suite (s_n).

4/ Déterminer à partir de quelle année la société va pouvoir disposer d'au moins 195 vélos.

EXERCICE 6 ***(4 points)***

Système hydraulique comportant trois canalisations à vannes



On considère un système hydraulique comportant trois canalisations sur lesquelles sont montées six vannes, numérotées de 1 à 6 et disposées comme l'indique la figure ci-dessus ; ces vannes contrôlent l'écoulement de l'eau entre le point A et le point B.

Un signal est envoyé pour ouvrir simultanément les vannes. Les vannes étant cependant défectueuses, elles ne s'ouvrent que neuf fois sur dix. On admet qu'elles fonctionnent de manière indépendante les unes des autres. Une canalisation permet l'écoulement de l'eau si toutes les vannes qu'elle comporte sont ouvertes (exemple : les vannes 4 et 5 pour la seconde canalisation).

On note X le nombre de canalisations qui permettent à l'eau de s'écouler entre A et B. Les valeurs prises par X sont donc : 0 ; 1; 2 ; 3.

1/ Déterminer la probabilité que les vannes 1, 2 et 3 soient ouvertes simultanément.

2/ Déterminer la loi de X.

3/ Déterminer la probabilité que l'eau s'écoule de A vers B.