RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

SÉNAT

DIRECTION DES RESSOURCES HUMAINES ET DE LA FORMATION

CONCOURS D'ADMINISTRATEUR-ADJOINT 2019

Épreuves d'admissibilité

ÉPREUVE À OPTION : MATHÉMATIQUES

(durée 2 heures – coefficient 2)

Le sujet comporte quatre exercices indépendants que chaque candidat peut traiter dans l'ordre de son choix.

Tous les résultats devront être justifiés par un raisonnement ou un calcul explicite.

<u>N.B.</u> : Est autorisé l'usage d'une calculatrice de poche – y compris d'une calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans aucun moyen de transmission, et sans document d'accompagnement.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants :
- *Exercice 1 : 5 points*
- *Exercice 2 : 6 points*
- *Exercice 3 : 5 points*
- *Exercice 4 : 4 points*

Le sujet comporte 5 pages (y compris celle-ci).

Exercice 1 *(5 points)*

Une entreprise produit et commercialise des pièces de moteur pour l'aéronautique. Sa production hebdomadaire est comprise entre 100 et 600 pièces et est intégralement vendue.

Pour x centaines de pièces produites, le bénéfice hebdomadaire total, exprimé en dizaines de milliers d'euros, est :

$$B(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln(x)$$

1) Calculer, à un euro près, le bénéfice hebdomadaire réalisé par la production de 500 pièces.

2) a) On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Calculer $B'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction B sur l'intervalle [1 ; 6].

c) Déterminer la quantité de pièces à produire pour réaliser un bénéfice maximal.

d) Calculer, à un euro près, la valeur du bénéfice hebdomadaire maximal.

3) a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_1^6 lnxdx$.

b) En déduire la valeur moyenne de la fonction B sur l'intervalle [1 ; 6] (valeur exacte demandée).

c) En déduire, à un euro près, la valeur moyenne du bénéfice réalisable en une semaine par l'entreprise lorsque la production varie de 100 à 600 pièces.

Exercice 2 *(6 points)*

Un technicien intervient dans une entreprise pour la mise en route et l'entretien d'une machine. Il intervient nécessairement la première semaine.

S'il intervient la $n^{\text{ième}}$ semaine, la probabilité qu'il intervienne la semaine suivante est 0,75. S'il n'intervient pas la $n^{\text{ième}}$ semaine, la probabilité qu'il intervienne la semaine suivante est 0,10.

Pour tout $n \geq 1$, on désigne par E_n l'événement « le technicien intervient la nième semaine » et par $\overline{E_n}$ l'événement contraire.

On note $p(A)$ la probabilité d'un événement A et $p_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B.

Pour tout $n \geq 1$, on pose $x_n = p(E_n)$.

1) Donner la valeur de x_1, de $p_{E_n}(E_{n+1})$, de $p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$.

2) Exprimer $p(E_n \cap E_{n+1})$, puis $p(\overline{E_n} \cap E_{n+1})$ en fonction de x_n.

3) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $x_{n+1} = 0{,}65x_n + 0{,}1$

4) On considère la suite (y_n) telle que pour tout $n \geq 1$, $y_n = x_n - \frac{2}{7}$.

Montrer que la suite (y_n) est géométrique.

5) Exprimer y_n, puis x_n, en fonction de n.

6) Calculer x_{10}. Interpréter ce nombre.

7) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. Interpréter cette valeur.

Exercice 3 *(5 points)*

Les deux tableaux ci-dessous indiquent la répartition des quatre groupes sanguins dans la population française, ainsi que la répartition des rhésus dans ces groupes.

A	B	AB	O
45%	9%	4%	42%

Groupes	A	B	AB	O
Rh+	84%	83%	83%	86%

Dans tout l'exercice, les calculs de probabilité sont demandés à 10^{-4} près.

1) Soit une personne choisie au hasard en France.

Calculer la probabilité qu'elle soit de type O Rh- (groupe O et rhésus négatif)

2) Une personne de type O Rh- est dite donneur universel et peut donner son sang à tous.

Lors d'une séance de don de sang, on interroge 25 donneurs indépendants les uns des autres.

On note X le nombre de donneurs universels rencontrés.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Calculer la probabilité de rencontrer exactement 3 donneurs universels parmi les 25 personnes.

c) En moyenne, combien de donneurs universels peut-on espérer rencontrer dans ce groupe ?

d) Calculer la probabilité de rencontrer au moins un donneur universel.

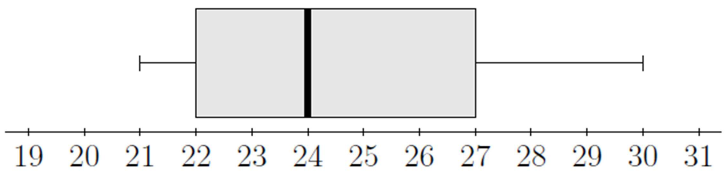
3) Quel nombre minimum de personnes faudrait-il interroger pour avoir plus de 99 % de chances de rencontrer au moins un donneur universel ?

Exercice 4 *(4 points)*

Lors d'une séance d'information sur la prévention des maladies cardio-vasculaires, une enquête a été menée auprès de 1000 personnes (600 hommes et 400 femmes). Pour chacune d'elles, on a relevé la valeur de l'indice de masse corporelle, noté IMC.

Pour un IMC supérieur ou égal à 27, la personne est déclarée « à risque élevé ». Une femme ayant un IMC supérieur ou égal à 22 et un homme ayant un IMC supérieur ou égal à 23 sont déclarés « à risque ».

1) Les résultats de l'enquête portant sur les hommes sont résumés sur ce diagramme en boite :



a) Déterminer l'étendue, la médiane, les quartiles et l'écart interquartile de cette série statistique.

b) Déterminer le pourcentage d'hommes présentant un risque élevé dans ce groupe.

c) Est-il vrai de dire que moins de 150 hommes dans ce groupe ne présentent pas de risque ?

2) Les résultats de l'enquête portant sur les femmes figurent dans ce tableau :

IMC	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Effectif	25	37	106	92	38	39	16	12	15	13	7

a) Calculer le pourcentage de femmes de ce groupe présentant un risque élevé.

b) En expliquant la démarche, déterminer la médiane et les quartiles de cette série statistique.

c) En indiquant les calculs effectués, déterminer la moyenne $\bar{x}$, la variance V et l'écart-type σ (donné à 10^{-4} près) de cette série.

d) Vérifier que 95 % des IMC des femmes de ce groupe sont dans l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma\ ;\ \bar{x} + 2\sigma]$.