



CONCOURS D'ADMINISTRATEUR-ADJOINT 2015

Épreuves d'admissibilité

DIRECTION DES
RESSOURCES HUMAINES
ET DE LA FORMATION



MATHÉMATIQUES

Le sujet comporte sept exercices indépendants que chaque candidat peut traiter dans l'ordre de son choix.

Tous les résultats devront être justifiés par un raisonnement ou un calcul explicite.

N.B. : Est autorisé l'usage d'une calculatrice de poche – y compris d'une calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome sans imprimante, sans aucun moyen de transmission, et sans document d'accompagnement.

(durée 3 heures – coefficient 3)

EXERCICE 1 (3,5 points)

On a observé l'évolution des inscriptions dans le club de gymnastique d'une ville.

Chaque année, 30 % des personnes inscrites au club de gymnastique l'année précédente renouvellent leur inscription.

De plus, chaque année, 10 % des habitants de la ville qui n'étaient pas inscrits au club l'année précédente s'y inscrivent.

On appelle n le nombre d'années d'existence du club.

On note g_n la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique lors de l'année n et p_n la proportion de la population qui n'est pas inscrite.

La première année de fonctionnement du club (année « zéro »), 20 % des habitants de la ville se sont inscrits.

1.a) Que vaut g_0 ?

1.b) Soit n un entier naturel. Que vaut la somme $g_n + p_n$?

2.a) Donner l'expression de g_{n+1} en fonction de g_n et de p_n

2.b) En déduire l'expression de g_{n+1} en fonction de g_n

3) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = g_n - 0,125$

Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

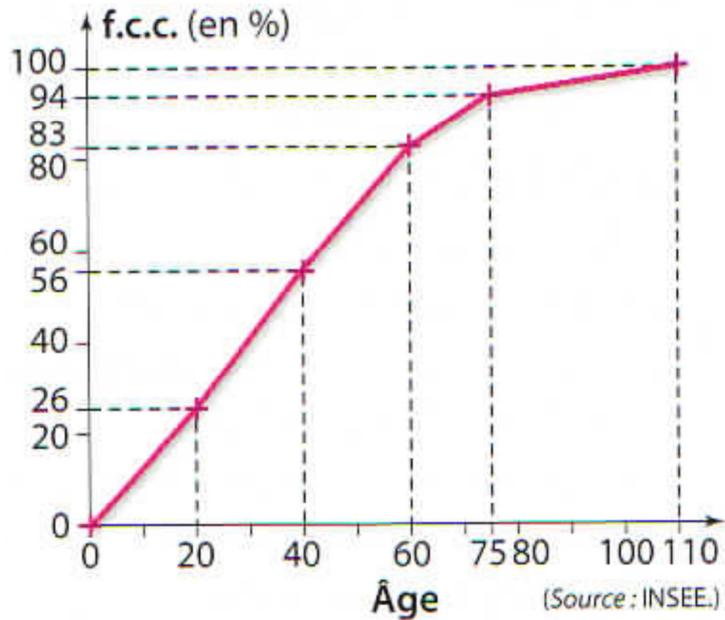
4) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

5.a) Déduire de la question 3) une expression de g_n en fonction de n .

5.b) Comment la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique évolue-t-elle au cours des années ? On indiquera, en la justifiant, la limite de la suite (g_n) .

EXERCICE 2 (2,5 points)

La répartition suivant l'âge de la population d'Ile-de-France est indiquée par la courbe des fréquences cumulées croissantes donnée ci-dessous.



Le tableau ci-dessous précise la répartition par sexe :

Classe	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 75[[75 ; 110[
Homme	51 %		48,4 %		35 %
Femme		51 %		53,2 %	

- 1) Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
- 2) Déterminer le pourcentage de la population que représentent les personnes du 3^{ème} âge (classe [60 ; 75[).
- 3) Déterminer approximativement l'âge médian, le premier et le troisième quartile.
- 4) Déterminer la classe modale.
- 5) Quel pourcentage de la population représentent les jeunes filles (classe [0 ; 20[) ?
- 6) Y a-t-il plus d'hommes que de femmes entre 0 et 40 ans ?
- 7) Déterminer une valeur approchée de l'âge moyen de la population.

EXERCICE 3 (3 points)

Les trois questions suivantes sont indépendantes. Les résultats devront être justifiés par un calcul.

- 1) En combien de temps un capital placé à un taux d'intérêt annuel composé de 12 % double-t-il ?

- 2) Une personne partage une somme de 300 000 euros entre ses trois petits-enfants, âgés respectivement de 12, 13 et 16 ans au jour du partage.
Ce partage est effectué de façon à ce que chaque bénéficiaire ait la même somme à sa majorité (18 ans), après capitalisation à un taux annuel de 7,5 %.
Comment s'effectue ce partage ? On arrondira à l'euro près.

- 3) Un particulier effectue le 15 de chaque mois, à partir de janvier 2015, un dépôt de 500 euros sur un livret d'épargne rémunéré au taux de 3 %. Le calcul des intérêts est de type « à capitalisation mixte » : la capitalisation des intérêts est annuelle mais la fraction courue sur des périodes inférieures à l'année est calculée en intérêt simple dont le taux est proportionnel au nombre de quinzaines (périodes de quinze jours : du 1 au 15, ou du 16 au 30 du mois) ; on considérera une année de 360 jours.
De quel capital disposera le particulier au 1^{er} janvier 2017 ?

EXERCICE 4 (4 points)

Chaque jour, une entreprise livre un colis. Pour cela, elle a le choix entre les services de deux sociétés de transport désignées par les lettres A et B. Les colis livrés par la société A ont une probabilité $\frac{1}{10}$ d'arriver en retard alors que ceux livrés par la société B arrivent en retard avec une probabilité de $\frac{1}{5}$.

Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

- 1) On suppose dans cette question que les colis sont envoyés par la société B dans 60 % des cas et par la société A le reste du temps.
 - a) Quelle est la probabilité qu'un colis donné arrive en retard ?
 - b) Un jour, un colis arrive en retard. Quelle est la probabilité que le colis ait été livré par la société A ?

- 2) On suppose désormais que pendant trois jours de suite, les colis ont été livrés par la société B.
 - a) Déterminer la probabilité qu'aucun des trois colis envoyés ne soit arrivé en retard.
 - b) On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de colis qui sont arrivés en retard.
Déterminer la loi de X et son espérance.
 - c) Chaque colis arrivé à l'heure est facturé 8 euros à l'entreprise et chaque colis en retard est facturé 3 euros.
Quelle est la probabilité pour que la facture totale pour ces trois jours ne dépasse pas 15 euros ?

- 3) On suppose désormais que le choix de la société pour la livraison obéit aux règles suivantes :
Un certain jour, numéroté 0, c'est la société A qui est choisie. À partir de ce jour, l'entreprise conserve la même société de livraison pour le lendemain à chaque fois que le colis arrive à l'heure, mais en change systématiquement si le colis arrive en retard.
On note a_n la probabilité que le colis livré au jour n soit livré par la société A.
 - a) Déterminer la valeur de a_1 .
 - b) Déterminer la probabilité que l'on fasse appel à la société B avant le jour 5 (jour 5 inclus).
 - c) Montrer que pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{7}{10} a_n + \frac{2}{10}$

EXERCICE 5 (2,5 points)

On considère la série double statistique suivante :

x_i	2	3	5	1	4
y_i	4	9	11	3	8

- 1) Déterminer, en justifiant vos calculs, l'équation de la droite de régression D_1 de y en x par la méthode des moindres carrés.
- 2) Déterminer l'équation de la droite de régression D_2 de x en y par la méthode des moindres carrés (deux possibilités : donner les résultats obtenus à l'aide de votre calculatrice ou procéder au calcul exhaustif).
- 3) En déduire les coordonnées du point d'intersection des droites D_1 et D_2 .
- 4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire $r_{x,y}$ entre x et y .
On donnera un résultat arrondi au dixième.
- 5) Comment auraient été placés les points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ si on avait obtenu $r_{x,y} = 1$?

EXERCICE 6 (2,5 points)

Un dé à six faces marquées de 1 à 6 est pipé de telle sorte que la probabilité d'apparition d'une face quelconque est proportionnelle au numéro qui y est inscrit.

- 1) On lance une fois ce dé et on considère les événements A : « le numéro obtenu est pair » et B : « le numéro obtenu est un multiple de 3 ».
Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.
- 2) On lance deux fois de suite le dé.
 X est la variable aléatoire égale à la somme des numéros apparus.
Déterminer la loi de X et son espérance.

EXERCICE 7 (2 points)

Les résultats pour les indices seront arrondis au centième près.

Deux catégories de salariés, A et B, travaillent dans une entreprise.

On s'intéresse à l'évolution de la masse salariale pour ces deux types de salariés en considérant les années 2000 et 2009.

<i>Catégories</i>	<i>Effectifs</i>		<i>Salaires moyens (en milliers d'euros)</i>	
	2000	2009	2000	2009
	q_0	q_1	p_0	p_1
<i>A</i>	22	18	20	34
<i>B</i>	14	21	25	45

- 1) Calculer la masse salariale de chaque catégorie en 2000 et en 2009.
- 2) Calculer l'indice simple du coût de la masse salariale en 2009, base 100 en 2000.
- 3) Calculer l'indice de Laspeyres des effectifs en 2009, base 100 en 2000.
- 4) Calculer l'indice de Paasche des salaires moyens en 2009, base 100 en 2000.