SÉNAT

SERVICE DES RESSOURCES HUMAINES ET DE LA FORMATION

Épreuve d'admissibilité

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES À LA GESTION ET DE STATISTIQUE DESCRIPTIVE

(durée 3 heures – coeff. 3)

Le sujet comporte six exercices indépendants que chaque candidat peut traiter dans l'ordre de son choix.

Tous les résultats devront être justifiés par un raisonnement ou un calcul explicite.

NB. : Pour cette épreuve, les candidats sont autorisés à utiliser une calculatrice de poche, y compris une calculatrice programmable et alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm X 15 cm de large (non fournie par le Sénat).

Exercice 1 (2,5 points)

Une entreprise fabrique des appareils qui doivent satisfaire à un cahier des charges. L'entreprise élabore un nouveau dispositif afin d'améliorer la qualité des appareils produits. Deux chaînes de fabrication sont alors en service : l'ancienne chaîne, sans le nouveau dispositif, et la nouvelle chaîne, munie du nouveau dispositif.

On considère un lot de 2500 appareils dont 2000 produits par l'ancienne chaîne et 500 produits par la nouvelle. On constate que parmi les appareils produits par l'ancienne chaîne, 87 % sont commercialisables et que parmi les appareils produits par la nouvelle chaîne, 93 % le sont.

1) Déterminer le pourcentage d'appareils du lot :

a) provenant de l'ancienne chaîne,

b) provenant de l'ancienne chaîne et qui sont commercialisables,

c) qui sont commercialisables.

2) On prélève au hasard un appareil du lot. On note A : « l'appareil provient de l'ancienne chaîne » et C : « l'appareil est commercialisable ». Déterminer la probabilité que l'appareil choisi provienne de l'ancienne chaîne sachant qu'il est commercialisable. On donnera une valeur décimale arrondie au millième le plus proche.

On décrira de manière détaillée le raisonnement utilisé et on donnera tous les calculs intermédiaires.

Exercice 2 (3,5 points)

On a relevé sur l'ensemble des 100 appartements d'une résidence, le nombre X de pièces principales et la surface totale Y (en m²) de ces appartements. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Y \ X	1	2	3	4
[20 ; 40[	8	9	1	0
[40 ; 60[	5	12	8	2
[60 ; 80[	0	5	19	6
[80 ; 100[	0	1	9	7
[100 ; 120[	0	1	3	4

1) On considère un appartement pris au hasard parmi les 100.

Calculer la probabilité que l'appartement choisi ait :

a) au moins 3 pièces principales et une surface totale supérieure ou égale à 100 m²,

b) exactement 2 pièces principales,

c) une surface totale plus petite que 60 m².

2) a) Donner dans un tableau la répartition des 100 appartements suivant leurs nombres de pièces.

b) Calculer la moyenne et l'écart-type de X dont on donnera une valeur décimale arrondie au millième le plus proche.

c) Calculer la médiane de X.

3) a) Donner dans un tableau la répartition des 100 appartements suivant leurs surfaces totales.

Compléter ce tableau en y indiquant les fréquences cumulées croissantes relatives aux 5 classes du caractère Y.

b) En supposant qu'il y a une répartition uniforme à l'intérieur de chaque classe, déterminer graphiquement ou par un calcul une valeur approchée de la médiane de Y.

Pour chaque question, on précisera toutes les formules utilisées et on donnera le détail des calculs.

Exercice 3 (4 points)

Une banque propose un produit d'épargne avec retrait total du capital acquis au bout de 8 ans. Le taux annuel d'intérêt est de 4,5 %. Les intérêts sont capitalisés à la fin de chaque trimestre. Pour obtenir ces conditions, aucun retrait n'est possible avant la fin du contrat. C'est l'hypothèse retenue pour les 2 souscriptions envisagées dans cet exercice.

1) Une personne A souscrit à ce produit d'épargne en versant l'unique somme de 2000 € au 01/01/2008.
Soit t le taux d'intérêt trimestriel correspondant au taux annuel de 4,5 %.

Exprimer en fonction de t, le capital obtenu au 31/03/2008 et le capital qui sera obtenu à la fin de l'année 2008. En déduire la valeur de $(1 + t)^4$.

2) Une personne B dépose elle aussi la somme de 2000 € le 01/01/2008 lors de la souscription. Elle décide, de plus, d'effectuer un virement automatique de 120 € sur ce compte d'épargne, le dernier jour de chaque trimestre, pendant les 8 ans. Il est précisé que toute somme placée le dernier jour d'un trimestre n'est prise en compte pour le calcul des intérêts que le trimestre suivant.

a) Exprimer en fonction de t et sous forme de somme, le capital C_1 qui sera obtenu à la fin de la première année.
On rappelle que, pour tout réel x différent de 1 et pour tout entier naturel n, on a :
$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$
En déduire que $C_1 = 2090 + \frac{5,4}{t}$.

b) On note $C_1, C_2, \ldots, C_8$, les capitaux acquis successivement à la fin de chaque année.
Exprimer C_2 en fonction C_1 et de t, puis en fonction de t. Exprimer C_3 en fonction de t.
En déduire le capital C_8 obtenu à la fin du contrat et montrer que : $C_8 = 2000 \times 1,045^8 + \frac{120}{t}(1,045^8 - 1)$.

3) On donne $1,045^8 \approx 1,422101$ et $1,045^{1/4} \approx 1,011065$.
Calculer t. En déduire le montant, arrondi au centime d'euro, du capital de B au bout des huit années de placement.

On décrira de manière détaillée le raisonnement utilisé et on donnera tous les calculs intermédiaires.

< POUR INFORMATION >

Exercice 4 (3,5 points)

Une étude faite par un journal lancé au début de l'an 2000 a permis de constater que le taux annuel de réabonnement est voisin de 80 % et que le nombre des nouveaux abonnés est chaque année d'environ 5000. En 2000, le nombre d'abonnés était de 10000 et on suppose que la situation décrite par l'étude reste la même au fil des ans.
En notant a_n le nombre d'abonnés du journal pour l'année 2000 + n, on a donc $a_0 = 10000$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,8\,a_n + 5000$.

1) Calculer les nombres d'abonnés a_1 et a_2 des années 2001 et 2002.

2) Quel est le nombre d'abonnés d'une année s'il reste le même que l'année précédente ? Que se passera-t-il dans ce cas les années suivantes ?

3) Pour étudier la suite (a_n), on considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
$u_n = 25000 - a_n$.

a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n. En déduire que : $a_n = 5000(5 - 3 \times 0,8^n)$.

4) a) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $0,8^n \leq \frac{1}{15}$.

b) Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnés sera supérieur à 24000.

On donnera pour chaque question le détail des calculs.

Exercice 5 (3,5 points)

Une usine fabrique des bidons contenant un mélange de divers produits chimiques.

La production journalière provient de trois machines A, B et C. La machine A produit chaque jour 16 bidons dont 6 sont de mauvaise qualité. La machine B produit chaque jour 22 bidons dont 5 sont de mauvaise qualité. La machine C produit chaque jour 10 bidons dont 2 sont de mauvaise qualité.

1) Les bidons sont vendus par lot de deux. La composition de chaque lot est effectuée en deux temps : on choisit au hasard un bidon produit par une machine. Si ce premier bidon contient un mélange de bonne qualité, on prend le deuxième bidon parmi la production de la même machine ; s'il contient un mélange de mauvaise qualité, on prend le deuxième bidon parmi la production d'une des deux autres machines. On s'intéresse à la composition du premier lot de la journée :

a) Calculer la probabilité d'obtenir un lot dont les deux bidons contiennent un mélange de bonne qualité.

b) Calculer la probabilité d'obtenir un lot dont les deux bidons contiennent un mélange de mauvaise qualité.

2) On considère maintenant l'ensemble de la production journalière des trois machines. Calculer le pourcentage de bidons contenant un mélange de bonne qualité.

3) On admet que le pourcentage de bidons de bonne qualité dans une production mensuelle est de 73 %. On prélève au hasard un échantillon de 20 bidons dans l'ensemble des pièces produites au cours du mois précédent. On admet que la production mensuelle est suffisamment grande pour que l'on puisse assimiler le prélèvement de 20 bidons à des tirages indépendants.

a) Calculer la probabilité de n'avoir aucun bidon dont le mélange est de mauvaise qualité.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bidons dont le mélange est de mauvaise qualité.

b) Quelle est la loi suivie par X ? Exprimer en fonction de l'entier k, compris entre 0 et 20, la probabilité $P(X=k)$.

c) Quel sera, en moyenne, le nombre de bidons dont le mélange est de mauvaise qualité, dans un échantillon de 20 bidons ?

On décrira de manière détaillée le raisonnement utilisé et on donnera tous les calculs intermédiaires. On arrondira tous les résultats au millième le plus proche.

Exercice 6 (3 points)

Le tableau suivant donne, pour les trois dernières années, le chiffre d'affaires trimestriel (en millions d'euros) d'une entreprise :

Années	1er trimestre	2ème trimestre	3ème trimestre	4ème trimestre
2005	17	24	34	24
2006	21	20	58	29
2007	24	20	64	32

On désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ les 12 trimestres classés chronologiquement et par $y_1, y_2, \ldots, y_{12}$ les chiffres d'affaires correspondants.

Soit X le caractère statistique prenant les 12 valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$, et Y celui prenant les 12 valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_{12}$.

1) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

On pourra utiliser les résultats suivants : $\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 650$; $\sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 13739$; $\sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 2630$.

2) Le tableau ci-dessous indique, pour chaque trimestre, la tendance et le rapport à la tendance :

Trimestre	Tendance	Chiffre d'affaires brut/Tendance
1	21,18	0,80
2	22,89	1,05
3	24,60	1,38
4	26,31	0,91
5	28,02	0,75
6	29,73	0,67
7	31,44	1,84
8	33,15	0,87
9	34,86	0,69
10	36,57	0,55
11	38,28	1,67
12	39,99	0,80

a) Justifier la tendance de 21,18 au 1er trimestre.

b) À l'aide des rapports à la tendance, calculer les coefficients saisonniers puis déterminer la série désaisonnalisée pour les trois années.

3) Donner une prévision du chiffre d'affaires pour le troisième trimestre de l'année 2008 en utilisant la droite de régression puis la composante saisonnière.

Pour chaque question, on précisera toutes les formules utilisées et on donnera le détail des calculs. On arrondira tous les résultats au centième le plus proche.