République Française

Sénat

Direction des Ressources humaines et de la Formation

CONCOURS D'ADMINISTRATEUR-ADJOINT 2023

Épreuves d'admissibilité

ÉPREUVE MAJEURE : MATHÉMATIQUES

(durée 3 heures – coefficient 3)

Cette épreuve se compose d'un ou plusieurs exercices faisant appel aux connaissances correspondant aux domaines du programme.

Tous les résultats devront être justifiés par un raisonnement ou un calcul explicite.

Le sujet est composé de six exercices indépendants, que chaque candidat peut traiter dans l'ordre de son choix :

- Exercice 1 : 2,5 points ;
- Exercice 2 : 5 points ;
- Exercice 3 : 4 points ;
- Exercice 4 : 3,5 points ;
- Exercice 5 : 3,5 points ;
- Exercice 6 : 1,5 point.

Le sujet comporte 7 pages (annexe comprise).

L'annexe devra être remise par vos soins aux surveillants lors de la restitution de votre copie. **Elle sera agrafée à votre copie**.

N.B. : L'usage d'une calculatrice de poche, y compris d'une calculatrice programmable et alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement est requis (non fournie par le Sénat).

Exercice 1 ***(2,5 points)***

Depuis le début du vingtième siècle, les tremblements de Terre sont classifiés selon les dégâts qu'ils occasionnent. En 1935, Charles Francis Richter met en place une échelle qui mesure la magnitude d'un tremblement de Terre et qui, depuis, porte son nom.

L'échelle de Richter va de 0 à 9. C'est à partir d'une magnitude de 5 que les dégâts d'un tremblement de Terre commencent à être très importants. Les tremblements de Terre de magnitude 9 ou plus sont exceptionnels.

On note M la magnitude d'un tremblement de Terre d'énergie E (exprimé en joules). Ce nombre est défini par :

$$M = \frac{2}{3}\frac{\ln(E)}{\ln(10)} - 2{,}88$$

où ln est la fonction logarithme népérien.

1. Calculer la magnitude d'un séisme d'énergie $2{,}089 \times 10^{10}$ joules. On arrondira le résultat à l'unité près.

2. Quelle est l'énergie d'un séisme de magnitude 2 ? On arrondira à l'unité de joules près.

3. Lors d'un tremblement de Terre, un sismologue explique à un journaliste qu'une différence d'une unité de magnitude sur l'échelle de Richter correspond à environ 31,6 fois plus d'énergie libérée.

a. On note E l'énergie correspondant à une magnitude M et E' l'énergie correspondant à la magnitude $M + 1$.
Prouver l'affirmation du sismologue.

b. En déduire qu'un tremblement de Terre de magnitude 7 est environ 1000 fois plus puissant qu'un tremblement de Terre de magnitude 5.

Exercice 2 ***(5 points)***

Une retenue d'eau artificielle est alimentée par un ruisseau dont le débit diminue de 20 % d'un jour à l'autre à cause de la chaleur.

On note D_n le débit (en m^3) pour le $n^{ième}$ jour après le 1er juin 2022, où n est un entier naturel.

Pour la journée du 1er juin 2022, le débit D_0 est égal à $300\ m^3$ par jour.
Dans tout l'exercice, les valeurs numériques seront arrondies au dixième de mètre cube près.

1. a. Calculer le débit D_1 pour le 2 juin 2022.

b. Exprimer D_{n+1} en fonction de D_n.

c. Quelle est la nature de la suite (D_n) ?

d. Exprimer D_n en fonction de l'entier n.

e. Calculer le débit le 30 juin 2022.

2. À partir du 1er juillet 2022, le débit du ruisseau est considéré comme nul car inférieur strictement à $0{,}5\ m^3/jour$. La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4 % du volume total de l'eau par jour.
On doit donc lâcher dans la retenue $500\ m^3$ d'eau chaque soir, après évaporation à cause de la sècheresse.
Le 1er juillet au matin, la retenue contient $V_0 = 100\ 000\ m^3$ d'eau.

On note V_n le volume d'eau, en m^3, au $n^{ième}$ matin après le 1er juillet 2022.

a. Montrer que $V_1 = 96\ 500\ m^3$ et calculer V_2.

b. Justifier que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0{,}96V_n + 500$.

3. On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = V_n - 12\ 500$.

a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b. Exprimer U_n en fonction de n.

c. En déduire V_n en fonction de n.

d. Calculer le volume restant dans la retenue d'eau au matin du 1er août.

4. La retenue sera considérée comme « à sec » lorsque le volume sera strictement inférieur à $15\ 000\ m^3$. Déterminer la date à laquelle la retenue sera considérée comme « à sec ».

Exercice 3 ***(4 points)***

Une région souhaite construire un barrage. Elle réalise une enquête auprès de la population.

Les résultats sont les suivants :

70 % des personnes interrogées sont contre la construction du barrage. Parmi ces personnes contre, 80 % sont écologistes.

Parmi les personnes favorables à la construction du barrage, 15 % sont écologistes.

On note :
C l'évènement « La personne interrogée est contre la construction ».
E l'évènement « La personne interrogée est écologiste ».

Partie 1.

1. **a**. Déterminer $P(C)$ la probabilité de l'évènement C et $P_C(E)$, la probabilité de l'évènement E sachant C.

b. Expliquer par une phrase la signification de $P_{\bar{C}}(E)$ et donner sa valeur.

2. Dresser un arbre de probabilités résumant les données précédentes.

3. Calculer $P(C \cap E)$ et préciser par une phrase la signification de cette probabilité.

4. Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.

5. On interroge une personne écologiste. Calculer la probabilité qu'elle soit contre la construction du barrage. On donnera le résultat en pourcentage arrondi au centième.

Partie 2.

1. On choisit au hasard cinq personnes parmi toutes les personnes interrogées lors de l'enquête. Le nombre de personnes interrogées étant très grand, on peut estimer que ce choix se fait de manière indépendante.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes qui sont contre la construction du barrage parmi les cinq personnes choisies au hasard.

a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?

b. Calculer la probabilité que 2 personnes exactement parmi les cinq choisies soient contre la construction du barrage.

2. On choisit au hasard des personnes parmi toutes les personnes interrogées lors de l'enquête. Le nombre de personnes interrogées étant très grand, on peut estimer que ce choix se fait de manière indépendante.
Combien faut-il choisir de personnes au minimum pour obtenir au moins une personne contre la construction du barrage avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99 ?

Exercice 4 ***(3,5 points)***

Tous les ans, entre 2017 et 2022, lors de la Journée du patrimoine, un musée d'art accueille gratuitement les visiteurs.

Le directeur a consigné, dans le tableau ci-dessous, l'évolution du nombre de visiteurs dans ce musée en 6 ans.

On note x la variable qui prend pour valeurs le rang x_i de l'année depuis 2017 et par u la variable qui prend pour valeurs le nombre u_i de visiteurs lors de la journée du patrimoine.

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant.

Année	2017	2018	2019	2020	2021	2022
x_i	0	1	2	3	4	5
u_i	164	260	345	550	980	1450

1. Calculer la moyenne et l'écart-type des valeurs des séries x et u. Détailler les calculs. On arrondira au millième.

2. **a**. Déterminer, en détaillant le calcul, la valeur de la variance de x, notée $var(x)$ et de la covariance de x et u notée $cov\left(x\,;u\right)$. On arrondira au millième.

b. En déduire l'équation de la droite de régression de u en x. Les coefficients seront arrondis au dixième près.

3. Les données ne permettent pas d'envisager un ajustement affine.
Le directeur effectue un changement de variable afin de déterminer une expression de u en fonction de x.

On pose $y = \ln(u)$.

a. Calculer les valeurs de y_i. Les résultats seront arrondis au millième.

Année	2017	2018	2019	2020	2021	2022
x_i	0	1	2	3	4	5
u_i	164	260	345	550	980	1450
y_i						

b. Tracer le nuage de points des variables x et y en annexe (**<u>à rendre avec la copie</u>**). On placera les points avec la précision permise par le graphique.

4. Déterminer une équation de la droite de régression de y. On pourra utiliser la calculatrice. Les coefficients seront arrondis au centième près.

5. Déterminer l'expression de u en fonction de y puis montrer que $u = 159{,}17e^{0{,}44x}$.

6. Quel nombre de visiteurs peut espérer le directeur lors de la journée du patrimoine de 2023 ?

Exercice 5 ***(3,5 points)***

Le recensement régulier des habitants d'un pays permet d'analyser l'évolution de sa population. Le tableau suivant donne le nombre d'habitants recensés (exprimé en millions) dans le pays entre 1960 et 1963.

Années	1960	1961	1962	1963
Nombre d'habitants (en millions)	30	30,502	31,009	31,519

Partie 1.

1. **a**. Calculer le pourcentage d'augmentation du nombre d'habitants dans ce pays entre 1960 et 1961 puis entre 1961 et 1962. On donnera les résultats en pourcentage arrondis au centième.

b. Calculer le pourcentage annuel moyen p d'augmentation du nombre d'habitants entre 1960 et 1962. On donnera le résultat en pourcentage arrondi au centième.

c. Déterminer le nombre d'habitants que possèdera le pays en 2020 si on considère que le pourcentage p reste constant chaque année. On donnera le résultat en millions, arrondi au millième.

Partie 2.

On modélise le nombre d'habitants chaque année depuis 1960 par la fonction f définie sur $[1960; +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{180}{2 + 4e^{-(0{,}05t-98)}}$$

où $f(t)$ est exprimé en millions et t est exprimé en années, $t \geq 1960$.

1. **a**. Recopier et compléter le tableau suivant. Arrondir les résultats au millième.

t	1960	1980	2000	2020	2040
$f(t)$					

b. Quel sera le nombre d'habitants de ce pays en 2040 ?

2. **a**. Calculer $f'(t)$ pour tout réel $t \geq 1960$.
b. Déterminer le signe de $f'(t)$.

3. **a**. Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f.
5. Déterminer en quelle année le nombre d'habitants du pays a été de 60 millions d'habitants.

Exercice 6 ***(1,5 point)***

Chaque véhicule circulant en France est identifié par une plaque d'immatriculation. Depuis 2009, elle est constituée de trois parties : deux lettres, trois chiffres et deux lettres, séparées par des tirets.

Les lettres I, O et U sont exclues à cause de leur ressemblance avec le 1, le 0 et le V.

Les couples de lettres SS et WW sont interdits à gauche et le couple SS est interdit à droite.

1. Calculer le nombre total de plaques d'immatriculation différentes que l'on peut attribuer.

2. Quelle est la probabilité qu'une plaque d'immatriculation prise au hasard sur l'ensemble total des plaques d'immatriculation possibles commence par CD ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée arrondie au millième.

Annexe

Exercice 4 question 3.b.